

kungen nach Gl. (IX) und (X)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: \quad f_{\text{sym.}}^{(a)} &= 8m p_1 \cdot p_2 + 16m^3, \\ f_{\text{sym.}}^{(b)} &= 4((\gamma \cdot p_1) p_2 - (\gamma \cdot p_2) p_1) \cdot p_0 \\ &\quad + 4m(p_1 \cdot p_2 + (\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot p_2) \gamma \cdot p_0) + 8m^3, \end{aligned} \quad (\text{XII})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}: \quad f_{\text{sym.}}^{(a)} &= 8m^3, \\ f_{\text{sym.}}^{(b)} &= 2m(\gamma \cdot p_0)(\gamma \cdot p_1 - \gamma \cdot p_2) \\ &\quad - 2m^2(\gamma \cdot p_1 + \gamma \cdot p_2). \end{aligned} \quad (\text{XIII})$$

Eingesetzt in Gl. (XI) läßt sich leicht die Größenordnung der Terme abschätzen. Da in der überwiegenden Zahl der Summanden $p_j = O(Z^{1/2})$ und $E_j = O(Z^{1/2})$ ergibt sich im Fall $W = W_0 Z^{1/2}$:

$$\mathbf{A}: \quad \Sigma^{(a)} = O(1), \quad \Sigma^{(b)} = O(Z^{1/2}), \quad (\text{XIV})$$

$$\mathbf{B}: \quad \Sigma^{(a)} = O(Z^{-1}), \quad \Sigma^{(b)} = O(1). \quad (\text{XV})$$

Unitäre S-Matrix im Lee-Modell mit „Dipolgeist“ und ein äquivalentes Modell

M. KAROWSKI

II. Institut für Theoretische Physik Hamburg,

(Z. Naturforsch. 24 a, 510—515 [1969]; eingegangen am 31. Dezember 1968)

The $N - 2\theta$ -sector of the Lee-model is solved in the special case of the “dipol-ghost”, and a unitary S -matrix is constructed. A general instruction is presented to construct the physical subspace of the whole state space with indefinite metric. This method is always applicable, if there are couples of “good” and “bad” ghosts. Another model with positiv definite state space is described, which has the same S -matrix as the Lee-model with “dipol-ghost”² in the $N - \theta$ - and $N - 2\theta$ -sector.

1. Einleitung

In den vergangenen Jahren sind mehrere Arbeiten¹ erschienen, die mit Hilfe von Dispersionsmethoden exakte Lösungen des Lee Modells im $N - 2\theta$ -Sektor angeben. Diese Methoden werden in Abschnitt 2 angewendet auf den Fall, daß ein sogenannter „Dipolgeist“² vorhanden ist.

Bekanntlich treten wegen der indefiniten Metrik, die mit den Geisterzuständen verbunden ist, Schwierigkeiten bei der physikalischen Interpretation auf. Die Unitarität des formalen S -Operators läßt sich nicht wie üblich als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ deuten. HEISENBERG hat gezeigt², daß man im Dipolfall diese Schwierigkeiten beseitigen kann. Das wird anhand der exakten Lösungen ausgeführt.

Es gibt eine allgemeine Vermutung³, daß eine lokale Quantenfeldtheorie, die in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik formuliert wird, in gewisser Weise einer nichtlokalen Theorie in einem normalen Hilbert-Raum äquivalent ist. In Abschnitt 3. wird dementsprechend ein nichtlokales Modell mit positiv definiter Metrik angegeben, das im $N - \theta$ - und $N - 2\theta$ -Sektor dieselbe S -Matrix

impliziert wie das Lee-Modell mit „Dipolgeist“. Es handelt sich um ein Modell mit separablem Potential, das jedoch nicht konstruierbar ist, wenn bei dem zugehörigen Lee Modell der Grenzfall der Punktquelle vorliegt.

2. Lee-Modell mit „Dipolgeist“

Der Hamilton-Operator des Lee-Modells im Impulsraum ist

$$H = H_0 + H' \quad (1)$$

mit dem freien Teil

$$H_0 = \int_{\mu}^{\infty} d\omega \omega a^+(\omega) a(\omega) \quad (2)$$

und dem Wechselwirkungsteil

$$H' = \int_{\mu}^{\infty} d\omega u(\omega) [V^+ N a(\omega) + h c] + Z \delta m V^+ V. \quad (3)$$

N , V und $a(\omega)$ sind die Vernichtungsoperatoren der Teilchen N , V und θ . Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit werden die Massen der beiden schweren Teilchen N und V gleichgesetzt. Da

¹ R. D. AMADO, Phys. Rev. **122**, 696 [1961]. — R. D. AMADO u. R. P. KENSCHAF, J. Math. Phys. **5**, 1340 [1964]. — A. PAGNAMENTA, J. Math. Phys. **6**, 955 [1965]. — C. M. SOMMERFIELD, J. Math. Phys. **6**, 1170 [1965]. — K. KAZES, J. Math. Phys. **6**, 1772 [1965]. — G. T. TINDLE, Nuovo Cim. **45**, 619 [1966].

² W. HEISENBERG, Nucl. Phys. **4**, 532 [1957].

³ H. P. DÜRR, Indefinite Metric and Nonlocal Interaction, Proc. of the Intern. Symposium on Quantum Field Theory, 69, Preprint Joint Institute for Nuclear Research, Dubna P2-3590 [1967].



das Modell nichtrelativistisch ist, läßt sich Energienullpunkt so wählen, daß diese Masse gleich Null ist. Die Impulsunabhängigkeit der Operatoren N und V bedeutet, daß die zugehörigen Teilchen am Koordinatenursprung fixiert sind. Das leichte Θ -Teilchen hat die Masse μ . Es ist „relativistisch“:

$$\omega = (\mu^2 + k^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Es werden nur S -Zustände betrachtet; die anderen haben keine Wechselwirkung. Die Renormierungsgrößen sind gegeben durch:

$$Z \delta m = \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{u^2(\omega)}{\omega}, \quad (5)$$

$$Z = - \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{u^2(\omega)}{\omega^2}. \quad (6)$$

Die Abschneidefunktion $u(\omega)$ lautet im Grenzfall der „Punktquelle“:

$$u(\omega) = g(k/\pi)^{1/2}. \quad (7)$$

Jedoch ist die Wechselwirkung auch in diesem Grenzfall nicht lokal.

Die nichtverschwindenden Vertauschungsrelationen sind:

$$\begin{aligned} [V, V^+]_+ &= 1/Z, \\ [N, N^+]_+ &= 1, \\ [a(\omega), a^+(\omega')] &= \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (8)$$

Da $Z < 0$ hat der Zustandsraum also eine indefinite Metrik. Im folgenden werden die Sektoren $N - \Theta$ und $N - 2\Theta$ betrachtet.

2.1. Der $N - \Theta$ -Sektor

Ein vollständiges System von Zuständen im $N - \Theta$ -Sektor ist:

$$|D'\rangle = - \int d\omega \frac{u(\omega)}{\omega^2} |N, \omega\rangle, \quad (9)$$

$$|V\rangle = \sqrt{Z} |V_0\rangle - \int d\omega \frac{u(\omega)}{\omega} |N, \omega\rangle \quad (10)$$

und die Streuzustände

$$\begin{aligned} |N, \omega\rangle^+ &= |N, \omega\rangle + \frac{u(\omega)}{h(\omega)} \\ &\cdot \left[\sqrt{Z} |V_0\rangle - \int d\omega' \frac{u(\omega')}{\omega' - \omega} |N, \omega'\rangle \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Dabei sind

$$|V_0\rangle = \sqrt{Z} V^+ |0\rangle \quad (12)$$

$$|N, \omega\rangle = N^+ a(\omega)^+ |0\rangle, \quad (13)$$

$$h(\omega) = \omega^2 \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \frac{u^2(\omega')}{\omega'^2(\omega' - \omega)}. \quad (14)$$

Da die Funktion $h(\omega)$ bei $\omega = 0$ eine doppelte Nullstelle hat, verschwindet die Norm von $|V\rangle$:

$$\langle V | V \rangle = 0. \quad (15)$$

Es empfiehlt sich, $|D'\rangle$ zu ersetzen durch die Linearkombination:

$$|D\rangle = \alpha |V\rangle + \beta |D'\rangle; \quad (16)$$

α und β können so gewählt werden, daß

$$\langle D | D \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle D | V \rangle = 1. \quad (17)$$

Dann läßt sich die Vollständigkeitsrelation im $N - \Theta$ -Sektor folgendermaßen schreiben:

$$1_{N\Theta} = |V\rangle \langle D| + |D\rangle \langle V| + \int d\omega |N, \omega\rangle^+ \langle N, \omega|. \quad (18)$$

$|V\rangle$ und $|N, \omega\rangle^+$ sind Eigenzustände des Hamilton-Operators:

$$\begin{aligned} H |V\rangle &= 0, \\ H |N, \omega\rangle^+ &= \omega |N, \omega\rangle^+. \end{aligned} \quad (19)$$

$|D\rangle$ wird „Dipolgeistzustand“ genannt. Er ist kein Eigenzustand des Hamilton-Operators, sondern es gilt:

$$H |D\rangle = \beta |V\rangle. \quad (20)$$

Physikalisch interpretierbar sind nur die Streuzustände $|N, \omega\rangle^+$. Beliebige Anteile von $|V\rangle$ haben keinen Einfluß wegen

$$\langle V | V \rangle = \langle V | N, \omega\rangle^+ = 0. \quad (21)$$

Ein physikalisches V -Teilchen gibt es in diesem Modell nicht. $|V\rangle$ wird auch als „guter“ und $|D\rangle$ als „schlechter“ Geist bezeichnet³.

Die S -Matrix im $N - \Theta$ -Sektor ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -\langle N, \omega' | N, \omega\rangle^+ &= \omega' S_{\omega} = \delta(\omega' - \omega) \\ &+ 2\pi i \delta(\omega' - \omega) \omega' T_{\omega}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\omega' T_{\omega} = -u^2(\omega)/h(\omega). \quad (23)$$

Die Streuzustände sind durch Lösung der Schrödinger-Gleichung bestimmt worden. Sie erfüllen die übliche asymptotische Bedingung:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \varphi(t) | \eta | \varphi(t) \rangle = 0 \quad (24)$$

mit

$$|\varphi(t)\rangle = \int d\omega (e^{i(H-\omega)t} |N, \omega\rangle - |N, \omega\rangle^+) \omega \varphi \quad (25)$$

und

$$\langle \varphi | \eta | \varphi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle + 2 |\langle V_0 | \varphi \rangle|^2. \quad (26)$$

Das durch (26) definierte Skalarprodukt ist positiv definit und induziert damit eine Topologie. Wegen

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int d\omega e^{i\omega t} f(\omega) (P/\omega + i\pi\delta(\omega)) t^n = 0 \quad (27)$$

für $f \in S$ verschwindet zunächst

$$\langle \varphi(t) | \varphi(t) \rangle = 2 - 2 \operatorname{Re} \int d\omega' \int d\omega \omega' \varphi^* \langle N, \omega' | e^{-i(H-\omega')t} | N, \omega \rangle^+ \omega \varphi, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \langle N, \omega' | N, \omega \rangle^+ \\ = \delta(\omega' - \omega) - \frac{u(\omega') u(\omega)}{h(\omega)} \frac{1}{\omega' - \omega - i0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Da H keine komplexen Eigenwerte hat verschwindet auch

$$\begin{aligned} \langle V_0 | \varphi(t) \rangle = \int d\omega \langle V_0 | \{ [|D\rangle \langle V| + |V\rangle \langle D| + \\ + i\beta t |V\rangle \langle V| + \int d\omega' e^{i\omega' t} |N, \omega'\rangle^+ \\ \times \langle N, \omega' | e^{-i\omega t} |N, \omega\rangle - |N, \omega\rangle^+ \} \omega \varphi. \end{aligned} \quad (30)$$

Der dritte Term ergibt sich aus (20).

2.2. Der $N - \Theta$ -Sektor

Die ungewöhnliche Form der Vollständigkeitsrelation im $N - \Theta$ -Sektor (18) hat zur Folge, daß im $N - 2\Theta$ -Sektor die Unitarität des formalen S -Operators

$$S^+ S = 1 \quad (31)$$

sich nicht als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ deuten läßt. Denn (31) lautet in Matricelementen geschrieben

$$\begin{aligned} \int d\omega [\langle \Phi | V, \omega \rangle^- \langle D, \omega | \psi \rangle^+ \\ + \langle \Phi | D, \omega \rangle^- \langle V, \omega | \psi \rangle^+] \\ + \frac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' \langle \Phi | N, \omega, \omega' \rangle^- \\ \times \langle N, \omega, \omega' | \psi \rangle^+ = \langle \Phi | \psi \rangle^+. \end{aligned} \quad (32)$$

Die beiden ersten störenden Terme, die von den Geistern herrühren, lassen sich aber beseitigen, indem man die „physikalischen Streuzustände“ $|\psi\rangle_{\text{ph}}^{++}$ im $N - 2\Theta$ -Sektor als Überlagerung von $|N, \omega, \omega'\rangle$ und $|V, \omega + \omega'\rangle^+$ darstellt:

$$\begin{aligned} |N, \omega, \omega'\rangle_{\text{ph}}^+ = |N, \omega, \omega'\rangle^+ + \\ + \varrho(\omega, \omega') |V, \omega + \omega'\rangle^+ \end{aligned} \quad (33)$$

und durch folgende Bedingung einschränkt:

$$\langle V, \omega | \psi_{\text{ph}}^+ \rangle = 0. \quad (34)$$

Das bedeutet, daß der physikalische Streuzustand $|\psi\rangle_{\text{ph}}^+$ keinen Dipolgeist mit einer auslaufenden Θ -Kugelwelle enthält. Aus (32) folgt nun die übliche

Unitaritätsrelation:

$$\frac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' |\langle N, \omega, \omega' | \psi \rangle_{\text{ph}}^+|^2 = 1. \quad (35)$$

In einem Raum mit positiv definierter Metrik ist (35) hinreichend dafür, daß

$$\mathcal{H}_{\text{ph}}^+ = \mathcal{H}_{\text{ph}}^-. \quad (36)$$

$\mathcal{H}_{\text{ph}}^{\pm}$ seien die Teilräume, die durch die physikalischen Zustände $|N, \omega, \omega'\rangle_{\text{ph}}^{\pm}$ aufgespannt werden. Hier ist diese Folgerung nicht richtig. Wegen der speziellen Form des metrischen Tensors (17) und (21) kann (36) aber trotzdem bewiesen werden: Sei \mathcal{H}^+ der Teilraum, der durch die formalen Zustände $|V, \omega\rangle^+$ und $|N, \omega, \omega'\rangle^+$, \mathcal{H}_V^+ der Teilraum, der durch $|V, \omega\rangle^+$ aufgespannt wird. Dann ist der orthogonale Raum zu \mathcal{H}_V^+ wegen (17) und (21)

$$\mathcal{H}_V^{+\perp} = \mathcal{H}^+. \quad (37)$$

Es ergibt sich daher aus (33) und (34) die Darstellung

$$\mathcal{H}_{\text{ph}}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}_V^{+\perp} = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}^-. \quad (38)$$

Entsprechend

$$\mathcal{H}_{\text{ph}}^- = \mathcal{H}^- \cap \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}_{\text{ph}}^+. \quad (39)$$

Diese Konstruktion des physikalischen Raumes läßt sich ganz allgemein immer dann durchführen, wenn die Geister paarweise als gute und schlechte Geister auftreten und (17) und (21) erfüllen. Im allgemeinen wird die Metrik in diesem Teilraum noch nicht positiv definit sein. Man muß dann den Faktorraum nach dem Radikal bilden:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ph}} / \mathcal{H}_{\text{ph}}^{\perp} \cap \mathcal{H}_{\text{ph}}. \quad (40)$$

Dieser ist dann ein normaler Hilbert-Raum.

Im folgenden werden diese Betrachtungen explizite ausgeführt. Dazu werden zunächst die formalen Zustände $|V, \omega\rangle^+$ und $|N, \omega, \omega'\rangle^+$ bestimmt.

Ein Zustand im $N - 2\Theta$ -Sektor läßt sich darstellen durch

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \int d\omega \sqrt{Z} |V_0, \omega\rangle^{V_0\omega} \psi + \\ + \int d\omega \int d\omega' |N, \omega, \omega'\rangle^{\omega\omega'} \psi \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{mit } |V_0, \omega\rangle = \sqrt{Z} V^+ a^+(\omega) |0\rangle,$$

$$|N, \omega, \omega'\rangle = N^+ a^+(\omega) a^+(\omega') |0\rangle. \quad (42)$$

Aus der Schrödinger-Gleichung

$$(H - E) |E\rangle = 0 \quad (43)$$

ergibt sich ein gekoppeltes System von Gleichungen:

$$Z(\delta m + \omega - E)^{V_0\omega'} \psi_E + 2 \int d\omega' u(\omega') \omega \omega' \psi_E = 0, \quad (44)$$

$$2(\omega + \omega' - E) \omega \omega' \psi_E + u(\omega)^{V_0 \omega' \omega} \psi_E + u(\omega')^{V_0 \omega} \psi_E = 0. \quad (45)$$

Durch Einsetzen von (45) in (44) erhält man die singuläre Integralgleichung^{2,4}:

$$h(E - \omega)^{V_0 \omega} \psi_E + \int d\omega' \omega' \frac{u(\omega) u(\omega')}{\omega' + \omega - E} \psi_E - \int d\omega' u(\omega') \omega \omega' 1_E = 0. \quad (46)$$

Dabei verschwindet $\omega \omega' 1_E$ für $|V, \omega\rangle^+$ und für $|N, \omega_0, \omega_1\rangle^+$ gilt:

$$\omega_0 \omega_1 1_{\omega_0 \omega_1} = \delta(\omega_0' - \omega_0) \delta(\omega_1' - \omega_1) + \delta(\omega_0' - \omega_1) \delta(\omega_1' - \omega_0). \quad (47)$$

Wir betrachten zunächst den Fall $|V, \omega\rangle^+ (E = \omega)$ und machen den Ansatz

$$^{V_0 \omega} \psi_V = ^{V_0} \psi_V \omega' \psi_\omega + ^{V_0} \psi_\omega \omega' \psi_V + ^{V_0} \psi_V ^{V_0} \psi_\omega 2 u(\omega') \omega' \chi_E. \quad (48)$$

Die Größen $^{V_0} \psi_V$ usw. gehören zu den Lösungen im N - θ -Sektor. Die Integralgleichung für $^{\omega} \chi_E$ lautet dann:

$$h(E - \omega) ^{\omega} \chi_E + \int d\omega' \frac{u^2(\omega')}{\omega' + \omega - E} \omega' \chi_E + Z = 0. \quad (49)$$

Für beliebige komplexe Werte von E , die nicht auf der reellen Achse von μ bis ∞ liegen, ist diese Gleichung eindeutig lösbar oder die zugehörige homogene Gleichung besitzt eine nichttriviale Lösung, die einem gebundenen Zustand entspricht.

Der Beweis wird im Anhang gebracht. Die Lösung ist:

$$^{\omega} \chi_E = B(\omega, E) / U(E) \quad (50)$$

$$\text{mit} \quad U(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega}{h(\omega) h(E - \omega)} \quad (51)$$

$$B(\omega, E) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega'}{h(\omega') h(E - \omega')} \frac{1}{\omega' + \omega - E} \quad (52)$$

Der Integrationsweg C umfaßt die positive reelle Achse im Uhrzeigersinn. Um auslaufende Kugelwellen zu erhalten, ist wie üblich E als $E + i0$ zu verstehen. Die Nullstellen von $U(E)$ sind Eigenwerte des Hamilton-Operators und gehören zu den gebundenen Zuständen im N - 2θ -Sektor. Wegen der indefiniten Metrik sind sie nicht notwendig reell.

Für $|N, \omega_0, \omega_1\rangle^+$ und $E = \omega_0 + \omega_1$ führen die entsprechenden Betrachtungen auf dieselbe Gleichung (49). Also ist

$$^{V_0 \omega} \psi_{\omega_0 \omega_1} = ^{V_0} \psi_{\omega_0} ^{\omega} \psi_{\omega_1} + ^{V_0} \psi_{\omega_1} ^{\omega} \psi_{\omega_0} + ^{V_0} \psi_{\omega_0} ^{V_0} \psi_{\omega_1} 2 u(\omega) ^{\omega} \chi_E. \quad (53)$$

Die Matricelemente $-\langle E' | E \rangle^+$ kann man recht mühsam direkt berechnen; dasselbe Ergebnis erhält man mit Hilfe der Formel:

$$-\langle E' | E \rangle^+ = +\langle E' | E \rangle^+ - 2\pi i \delta(E' - E) \langle E' | (H - E') | E \rangle^+ \quad (54)$$

Für den Fall $\langle E' | = \langle V, \omega' |$ ist

$$\langle V, \omega' | (H - E') = \langle V | [a(\omega'), H'] = \frac{1}{\sqrt{Z}} * u(\omega') \int d\omega'' \omega'' \psi_V^* \langle V_0, \omega'' | \quad (55)$$

einzusetzen. Dann erhält man:

$$\langle V, \omega' | (H - E') | E \rangle^+ = -u(\omega') \int d\omega'' \frac{u(\omega'')}{\omega''} ^{V_0 \omega''} \psi_E. \quad (56)$$

Wegen $\omega' = E$ folgt mit Hilfe von (46)

$$\langle V, \omega' | (H - E') | E \rangle^+ = h(E - \omega') ^{V_0 \omega'} \psi_E |_{\omega' = E}. \quad (57)$$

Für den Fall $\langle E' | = \langle N, \omega_0', \omega_1' |$ ergibt sich

$$\langle N, \omega_0', \omega_1' | (H - E') | E \rangle^+ = u(\omega_0') ^{\omega_0 \omega_1'} \psi_E + u(\omega_1') ^{V_0 \omega_0'} \psi_E. \quad (58)$$

Die Größen $+\langle E' | E \rangle^+$ lassen sich durch direktes Ausrechnen bestimmen, wie zu erwarten ergibt sich:

$$\begin{aligned} +\langle V, \omega' | V, \omega \rangle^+ &= 0, \\ +\langle N, \omega_0', \omega_1' | V, \omega \rangle^+ &= 0, \\ +\langle N, \omega_0', \omega_1' | N, \omega_0, \omega_1 \rangle^+ &= ^{\omega_0 \omega_1'} 1_{\omega_0 \omega_1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Setzt man die Lösungen (48) und (53) ein, so erhält man:

$$-\langle N, \omega_0', \omega_1' | V, \omega \rangle^+ = -2\pi i \delta(E' - E) \frac{u(\omega_0') u(\omega_1') u(\omega)}{h(\omega_0') h(\omega_1') h(\omega)} \frac{2}{U(E)}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} -\langle N, \omega_1', \omega_1' | N, \omega_0, \omega_1 \rangle^+ &= \omega_0 S_{\omega_0} \omega_1' S_{\omega_1} + \omega_0' S_{\omega_1} \omega_1' S_{\omega_0} \\ &- 2\pi i \delta(E' - E) \frac{u(\omega_0') u(\omega_1') u(\omega_0) u(\omega_1)}{h(\omega_0') h(\omega_1') h(\omega_0) h(\omega_1)} \frac{2}{U(E)}. \end{aligned} \quad (61)$$

Es soll nun gezeigt werden, wie die „physikalischen“ Zustände im $N - 2\theta$ -Sektor zu definieren sind, damit die Unitarität der S -Matrix sich wie üblich als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ interpretieren läßt.

⁴ G. KÄLLÉN u. W. PAULI, Mat. Fys. Nedd. Dan. Vid. Selsk. **30**, Nr. 7 [1955].

Nach (34) muß (57) für $|E\rangle_{\text{ph}}^+$ verschwinden. Diese Größe rührt von dem Doppelpol von $V_{\omega\omega'}\psi_{E,\text{ph}}$ bei $\omega' = E$ her. Dieser Doppelpol ist in dem Term $\omega'\chi_{E,\text{ph}}$ enthalten. Aus (34) folgt daher

$$\varrho(\omega, \omega') = -\frac{u(\omega)u(\omega')h(\omega + \omega')}{h(\omega)h(\omega')u(\omega + \omega')}. \quad (62)$$

Die physikalischen Streuzustände $|N, \omega_0, \omega_1\rangle^+$ erfüllen dann nach (59) die üblichen Orthogonalitätsrelationen:

$${}_{\text{ph}}^+\langle N, \omega'_0, \omega'_1 | N, \omega_0, \omega_1 \rangle_{\text{ph}}^+ = {}_{\omega'_0\omega'_1} \omega_0\omega_1. \quad (63)$$

Für die S -Matrix erhält man:

$$\begin{aligned} {}_{\text{ph}}^-\langle N, \omega'_0, \omega'_1 | N, \omega_0, \omega_1 \rangle_{\text{ph}}^+ &= {}_{\omega'_0\omega'_1} S_{\omega_0\omega_1} \\ &= {}_{\omega_0\omega_1} S_{\omega_0\omega'_1} S_{\omega'_1\omega'_0} + {}_{\omega'_0\omega'_1} S_{\omega_1\omega'_0} S_{\omega'_0\omega_1}. \end{aligned} \quad (64)$$

Der Term, der eine „echte Dreiteilchenstreuung“ beschreibt, fällt heraus.

Die Unitaritätsrelation (35) folgt jetzt unmittelbar aus der Unitarität der S -Matrix im $N\Theta$ -Sektor. Es läßt sich weitergehend explizite zeigen, daß entsprechend (36)

$$P_+ = P_- = P, \quad (65)$$

wobei P_+ und P_- die Projektionsoperatoren auf die physikalischen Teilräume sind:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \int d\omega_0 \int d\omega_1 |N, \omega_0, \omega_1\rangle_{\text{ph}}^{\pm} {}_{\text{ph}}^{\pm}\langle N, \omega_0, \omega_1|. \quad (66)$$

Die Frage ist noch offen, ob es Zustände gibt, die asymptotisch für $t \rightarrow \mp\infty$ in die physikalischen Zustände $|\psi\rangle_{\text{ph}}^{\pm}$ übergehen. Entsprechend wie im $N - \Theta$ -Sektor kann man zeigen:

$$s \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i(H - \omega_0 - \omega_1)t} |N, \omega_0, \omega_1\rangle = |N, \omega_0, \omega_1\rangle^+. \quad (67)$$

Nach Definition vertauscht P mit dem Hamilton-Operator. Daraus folgt:

$$s \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i(H - \omega_0 - \omega_1)t} P |N, \omega_0, \omega_1\rangle = |N, \omega_0, \omega_1\rangle_{\text{ph}}^{\pm}. \quad (68)$$

In dem physikalischen Teilraum gelten also die üblichen asymptotischen Relationen.

3. Ein äquivalentes Modell

Es soll jetzt gezeigt werden, daß es ein Modell mit einem normalen Zustandsraum mit positiv definierter Metrik gibt, welches dem Lee-Modell mit „Dipolgeist“ in den beiden Sektoren $N - \Theta$ und $N - 2\Theta$ äquivalent ist, d.h. die Streuamplituden stimmen in beiden Modellen überein. Die besonders einfache

Form der S -Matrix (64) legt es nahe, ein Modell mit separablem Potential zu betrachten.

Der Hamilton-Operator sei:

$$H = \int d\omega \omega a^+(\omega) a(\omega) - [\int d\omega v^*(\omega) N^+ a^+(\omega)] h c. \quad (69)$$

N und $a(\omega)$ sind die Vernichtungsoperatoren des „schweren“ Teilchens N und des „leichten“ Teilchens Θ . H ermöglicht folgenden Prozeß

$$N + \Theta \leftrightarrow N + \Theta. \quad (70)$$

Aus der Schrödinger-Gleichung berechnet man den gebundenen Zustand N^* :

$$|E\rangle = c \int d\omega \frac{v^*(\omega)}{\omega - E} |N, \omega\rangle; \quad (71)$$

E ist die Nullstelle von

$$g(E) = 1 - \int d\omega \frac{|v(\omega)|^2}{\omega - E}. \quad (72)$$

Diesem Zustand entspricht nichts im Lee-Modell mit „Dipolgeist“, denn $|V\rangle$ hat ja die Norm Null, ist also physikalisch nicht meßbar.

Für die Streuzustände ergibt sich:

$$|N, \omega\rangle^+ = |N, \omega\rangle + \frac{v(\omega)}{g(\omega)} \int d\omega' \frac{v^*(\omega')}{\omega' - \omega} |N, \omega'\rangle \quad (73)$$

und für die Streuamplitude:

$${}_{\omega'} T_{\omega} = |v(\omega)|^2 / g(\omega). \quad (74)$$

$$\text{Setzt man } v(\omega) = u(\omega) / \sqrt{Z\omega}, \quad (75)$$

so erhält man für die Funktion $g(\omega)$

$$g(\omega) = 1 - \frac{1}{|Z|} \int d\omega' \frac{1}{\omega'} \frac{u^2(\omega')}{\omega' - \omega} = \frac{1}{Z\omega} h(\omega). \quad (76)$$

$$\text{Daher ist } {}_{\omega'} T_{\omega} = \frac{|v(\omega)|^2}{g(\omega)} = -\frac{u^2(\omega)}{h(\omega)}. \quad (77)$$

Die Streuamplitude stimmt also mit der aus 2.1 überein. Es ist bemerkenswert, daß im Grenzfall der Punktquelle

$$u(\omega) = g(k/\pi)^{1/2}$$

sich dieses Modell nicht konstruieren läßt. Denn, da Z divergiert, wird (75) dann sinnlos.

Die Lösungen im $N - 2\Theta$ -Sektor sind einfach die symmetrischen direkten Produkte der Lösungen aus dem $N - \Theta$ -Sektor. Das gleiche gilt für die S -Matrix. Übergänge von der Art

$$N^* + \Theta \rightarrow N + 2\Theta$$

können daher nicht vorkommen. Also stimmt auch in diesem Sektor die Streuamplitude mit der aus 2.2 überein.

In den höheren Sektoren wird der einfache Hamilton-Operator (69) die Äquivalenz nicht mehr ge-

währleisten. Es müssen dann noch Zusätze addiert werden, die eine Vielteilchenwechselwirkung beschreiben.

Anhang

Die Integralgleichung (49) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$h(E - \omega) {}^\omega\chi_E + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{d\omega' h(\omega')}{\omega' + \omega - E} {}^{\omega'}\chi_E + Z = 0. \quad (\text{A1})$$

Der Integrationsweg D umfaßt die reelle Achse von μ bis ∞ im Uhrzeigersinn.

Es soll zunächst bewiesen werden:

$$F(\omega) = h(\omega) h(E - \omega) [{}^\omega\chi_E + {}^{E-\omega}\chi_E] = \text{const.} \quad (\text{A2})$$

Das Integral in (A1) — und damit $h(E - \omega) {}^\omega\chi_E$ — ist als Funktion von ω holomorph bis auf einen Verzweigungsschnitt von $E - \mu$ bis $E - \infty$. An diesem Schnitt gilt:

$$\begin{aligned} & h(E - \omega - i0) {}^{\omega-i0}\chi_E - h(E - \omega + i0) {}^{\omega+i0}\chi_E \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_D d\omega' h(\omega') {}^{\omega'}\chi_E \\ & \cdot \left[\frac{1}{\omega' + \omega + i0 - E} - \frac{1}{\omega' + \omega - i0 - E} \right] \quad (\text{A3}) \\ &= -[h(E - \omega - i0) - h(E - \omega + i0)] {}^{E-\omega}\chi_E. \end{aligned}$$

$F(\omega)$ ist also an diesem Schnitt stetig. Das gleiche gilt für den Schnitt von μ bis ∞ wegen der Symmetrie unter der Substitution $\omega \rightarrow E - \omega$. $F(\omega)$ ist also in der ganzen ω -Ebene holomorph. Aus (A1) folgt wegen $h(\omega) \sim Z\omega$ für $\omega \rightarrow \infty$

$${}^\omega\chi_E \sim 1/\omega \quad \text{und} \quad {}^\omega\chi_E + {}^{E-\omega}\chi_E = 0(\omega^{-2}). \quad (\text{A4})$$

Daher ist $F(\omega)$ beschränkt und nach dem Liouville'schen Theorem (A2) bewiesen.

Zur Bestimmung der Konstanten wird folgende Integration ausgeführt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega ({}^\omega\chi_E + {}^{E-\omega}\chi_E) \\ &= \text{const} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega}{h(\omega) h(E - \omega)}. \quad (\text{A5}) \end{aligned}$$

Da ${}^\omega\chi_E$ innerhalb und ${}^{E-\omega}\chi_E$ außerhalb des Integrationsweges holomorph ist, verschwindet das Integral über ${}^\omega\chi_E$ und bei dem über ${}^{E-\omega}\chi_E$ kann der Integrationsweg durch einen unendlich großen Kreis ersetzt werden. Wegen (A4) folgt für $U(E) \neq 0$:

$$\text{const} = \frac{1}{U(E)}. \quad (\text{A6})$$

Die gleichen Überlegungen führen für das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega' \frac{{}^{\omega'}\chi_E + {}^{E-\omega'}\chi_E}{\omega' + \omega - E} \quad (\text{A7})$$

zur Lösung der Integralgleichung:

$${}^\omega\chi_E = \frac{B(\omega, E)}{U(E)}. \quad (\text{A8})$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß (A8) die Integralgleichung (A1) erfüllt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega' h(\omega')}{\omega' + \omega - E} B(\omega', E) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_C \frac{d\omega''}{h(\omega'') h(E - \omega'')} \int_D \frac{d\omega' h(\omega')}{\omega' + \omega - E} \frac{1}{\omega'' + \omega - E} \quad (\text{A9}) \end{aligned}$$

Das Integral über D kann ersetzt werden durch die Residuen bei $E - \omega$, $E - \omega''$ und ∞ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\omega''}{h(\omega'') h(E - \omega'')} \left[\frac{h(E - \omega)}{\omega'' - \omega} + \frac{h(E - \omega'')}{\omega - \omega''} - Z \right]. \quad (\text{A10})$$

Der Integrationsweg C kann ersetzt werden durch einen Weg F , der die Singularitäten von $(h(E - \omega''))^{-1}$ umfaßt, d.h. den Strahl von E bis $E - \infty$; denn der Integrand ist holomorph außerhalb von C und F . Der zweite Term verschwindet dann, und nach der Substitution $\omega'' \rightarrow E - \omega''$ ergibt sich:

$$-h(E - \omega) B(\omega, E) - ZU(E). \quad (\text{A11})$$

Es folgt: (A8) erfüllt (A1).

Wenn $U(E) = 0$, ist nach (A11) $B(\omega, E)$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Damit ist die Behauptung aus 2.2 bewiesen.